

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады
школьников по математике
в 2014 – 2015 учебном году
11 класс**

Время выполнения заданий — 4 часа

Уважаемый участник!

1. Решение математической задачи включает не только ответ, но и рассуждение, приводящее к этому ответу. Приведённый ответ без соответствующего рассуждения не может рассматриваться как решение задачи и оценивается не более чем 10 процентами полного балла за задачу (если только решение задачи не подразумевает приведение конкретного примера). Задача признается решённой, если в предложенном тексте достаточно явно изложены все идеи, необходимые для получения и обоснования ответа. В зависимости от того, насколько исчерпывающе эти идеи раскрыты, решённая задача оценивается от 50 до 100 процентов от полного балла.

2. Во время тура запрещается пользоваться справочной литературой, микрокалькуляторами, средствами мобильной связи.

3. В геометрических задачах допускается выполнение чертежей ручкой и/или «от руки», без использования чертёжных приборов. Использование чертёжных инструментов не запрещено.

4. При проверке оценивается только математическое содержание работы. Оценка не снижается за небрежность почерка, орфографические, грамматические и стилистические ошибки, грязь и т.п. (если они не препятствуют пониманию решения). Однако, аккуратное оформление улучшает понимание Вашего рассуждения и положительно сказывается на оценке жюри.

5. Задачи не обязательно решать в том порядке, в котором они указаны в тексте.

6. Все задачи равноценны и оцениваются из 7 баллов за задачу.

11.1. Бесконечная арифметическая прогрессия, целиком состоящая из натуральных чисел, содержит число a и его квадрат. Докажите, что она содержит и куб числа a .

11.2. $\overline{ABC}$ — трёхзначное число, то есть $\overline{ABC} = 100A + 10B + C$, где A, B, C — цифры, и $A \neq 0$. Может ли сумма $\overline{ABC} + \overline{BCA} + \overline{CAB}$ быть квадратом натурального числа? Ответ обосновать.

11.3. Баба-Яга и Кощей собрали некоторое количество мухоморов, при этом общее количество крапинок на мухоморах Бабы-Яги было в 12 раз больше, чем на мухоморах Кощея. Когда Баба-Яга отдала Кощею свой мухомор с наибольшим количеством крапинок, на её мухоморах стало крапинок только в 7 раз больше, чем у Кощея. Докажите, что Баба-Яга собрала не менее 20 мухоморов.

11.4. $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник. Известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC , касаются друг друга. Докажите, что касаются друг друга и окружности, вписанные в треугольники BCD и BAD .

11.5. Пусть $a > 0, b > 0$. Докажите неравенство $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}$.

11.6. Пусть M — точка пересечения медиан основания ABC треугольной пирамиды $ABCD$. На отрезке MD произвольным образом выбрана точка O . Лучи AO, BO, CO пересекают боковые грани пирамиды в точках A_1, B_1 и C_1 . Докажите, что плоскость $A_1B_1C_1$ параллельна основанию пирамиды.